Démontrer en mathématiques : une pratique frappée d’obsolescence?

Jean-Philippe DROUHARD
Maître de Conférences

René LOZI
Professeur des Universités

EA 6308 I3DL (Interdidactique et Didactique des Disciplines et des Langues)
Université de Nice Sophia Antipolis, France
jpdrouhard@gmail.com Rene.Lozi@unice.fr

1 Introduction, position du problème, présentation de la démarche suivie

Même si l’apprentissage des mathématiques occupe une place importante dans le cursus qui va de la petite section de maternelle[1] au premier cycle du collège[2], savoir démontrer est longtemps apparu comme caractérisant l’entrée dans le monde des mathématiques savantes. La démonstration en géométrie en classe de 4ème[3] apparaît comme une sorte de rite de passage initiatique à l’adolescence, faisant le tri entre les « bons en maths » et les autres, tri d’autant plus implacable qu’il peut se targuer de l’absolue neutralité résultant de l’objectivité parfaite des mathématiques, et qu’il tire sa légitimité de l’antiquité même du *more geometricum* qui remonte au grand Euclide. Tout au plus certains élèves, ni « bons » ni « mauvais » savent-ils faire illusion – et s’illusionner eux-mêmes – en mimant sans les comprendre les gestes de la démonstration, comme les mélanésiens du *culte du cargo* mimaient les gestes des radio-télégraphistes avec des « radios » en bambous et en feuillages (Lindstrom 1993).

Or, à observer même rapidement l’évolution des manuels de mathématiques du lycée[4], il apparaît que les propositions mathématiques qu’on y trouve sont de moins en moins accompagnées de leur démonstration, et que celles d’entre elles qui subsistent sont souvent lacunaires. Il semble bien qu’on ait là un phénomène d’obsolescence, même s'il faut nuancer ce constat pour tenir compte de nouveaux dispositifs tels que les « ROC » (Restitutions Organisées des Connaissances). À l’intérieur du système didactique, le statut prééminent de la démonstration n’est pourtant pas explicitement remis en cause (Schneider, 2012 : « Les praxéologies ‘déduction’ restent un ‘phare’ pour les enseignants du secondaire »). Nous envisageons donc l’hypothèse qu’en l’occurrence, les « *raisons sociales extérieures aux*

1 3 ans (nous indiquons les âges théoriques correspondant à chaque niveau)

2 12 ans

3 13 ans

4 de 15 à 17 ans

institutions didactiques »[5] seraient, au moins en partie, à chercher du côté des institutions de production du 'savoir savant'[6].

Cette communication poursuit deux objectifs, en relation dialectique l'un avec l'autre. Il s'agit d'une part de voir en quoi l'objet « démonstration » est-il effectivement frappé d'obsolescence dans les mathématiques enseignées, en observant cette évolution sur un cas bien délimité. Il s'agit d'autre part d'avoir une idée de l'évolution parallèle de la démonstration dans les mathématiques enseignées et dans la production mathématique actuelle. On peut justifier l'intérêt d'une telle présentation par le fait que cette dernière est plutôt mal connue en dehors de la communauté mathématique et qu'à l'ignorer ou même simplement à la sous-estimer on se prive des moyens de voir ce qui, dans l'évolution de la démonstration enseignée, ne relève pas strictement de contraintes internes au système didactique.

2 La démonstration « classique »

Le diagnostic d'obsolescence de la démonstration est posé par Jean-Pierre Daubelcour, de l'IREM de Lille (2009, p.256) :

> « Dans le texte du programme obligatoire[7], (…) lorsque qu'au §7 on parle de "bâtir une démonstration", la pratique ne suit pas, les concepteurs, dans la colonne de droite des textes conseillent d'admettre la quasi-totalité des théorèmes »

Or les programmes officiels de l'enseignement français, et l'analyse qui en est faite (Daubelcourt, 2009) parlent de « la démonstration » (et en général « des mathématiques ») ce qui suppose implicitement que ce qui est enseigné est bien la même chose que l'objet culturel et social « mathématiques » élaboré au cours des siècles. La didactique des mathématiques a très tôt mis en question cette identité: c'est tout le thème de la *Transposition Didactique* telle qu'elle est exposée par Chevallard (1985). Cette distinction (entre mathématiques enseignées et mathématiques « savantes ») nous permettra de considérer l'évolution de la démonstration enseignée à la lumière de l'évolution de la démonstration dans les mathématiques actuelles.

2.1 L'idéal Euclidien

Nous allons tout d'abord rappeler sans les développer[8] les grandes étapes historiques de la

5 texte de présentation du thème 2

6 institutions que nous engloberons sous le syntagme de « communauté mathématique »

7 il s'agit ici du programme de 1997

8 nous n'avons fait que reprendre ici, à l'intention des lecteurs non spécialistes, des points abondamment

constitution cette démonstration « classique ». Elle apparaît avec l'idéal Euclidien, et le raisonnement géométrique a été longtemps le modèle par excellence de la démonstration mathématique, d'où l'expression, qu'on retrouve chez Spinoza, pour qualifier sa façon d'exposer la philosophie, de *more geometrico* (« à la manière de la géométrie »).

Quand Galilée écrit en 1623 dans *Il Saggiatore* que « le livre de la nature est écrit en langage mathématique », il précise bien qu'il s'agit de géométrie :


IL SAGGIATORE
Nel quale
Con bilancia esquisita e giusta
si ponderano le cose contenute
nella
LIBRA ASTRONOMICA E FILOSOFICA
DI LOTARIO SARSI SIGENSANO
Scritto in forma di lettera
All'Ill.mo et Reuer.mo Mons.r D.
VIRGINIO CESARINI
Acc.o Linceo M.o di Camera di N.S.
Dal Sig.r
GALILEO GALILEI
Acc.o Linceo Nobile Fiorentino
Filosofo e Matematico Primario
del
Ser.mo Gran Duca di Toscana.
FILOSOFIA NATVRALE
MATEMATICA
IN ROMA MDCXXIII.
Appresso Giacomo Mascardi.
F. Villamoena Fecit.

figure 1: Il Saggiatore

> « La filosofia naturale è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi, io dico l'universo, ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua e conoscer i caratteri nei quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto. »[9]

documentés d'épistémologie et d'histoire des mathématiques (voir entre autres Dahan-Dalmedico & Peifer, 1986 ou Flament & Nabonnand, 2011)

9 « La philosophie de la nature est écrite dans ce grand livre qui se tient toujours ouvert devant nos yeux, je veux dire l'univers, mais ne peut être comprise si d'abord on n'apprend pas à en comprendre la langue, et à connaître les caractères dans lesquels il est écrit. Il est écrit dans le langage des mathématiques, et ses

2.2 crise des fondements et résolution formaliste

La démonstration s’est ensuite progressivement affranchie du cadre géométrique, en ‘colonisant’ les autres domaines des mathématiques, jusqu’à une première remise en question, la ‘crise des fondements’, à partir de la fin du XIXème siècle. Une des questions était justement celle de savoir si le modèle géométrique (où toute proposition vraie est démontrable à partir d’autres propositions et d’un nombre réduit d’axiomes) pouvait être à bon droit étendu à toutes les mathématiques (en particulier à l’arithmétique, ou à ces objets nouveaux pour l’époque qu’étaient les ensembles infinis). L’axiomatisation de l’arithmétique par Giuseppe Peano en 1889 apportait une réponse à cette première question[10], au moins en qui concerne l’arithmétique. Toutefois la question de savoir dans quelle mesure on devait admettre de tels axiomes[11] restait en suspens. En effet, la construction de géométries non-euclidiennes par N. I. Lobatchevski en 1837 et (indépendamment) par J. Bolyai en 1832 avait montré qu’il était possible de construire des géométries parfaitement cohérentes tout en prenant le contre-pied de certains axiomes[12], alors qu’ils étaient jusque-là tenus pour des « vérités indémontrables devant être admises » et en les remplaçant par d’autres.

Après de nombreuses tentatives (Husserl, Frege, Russel, Zermelo…) plus ou moins couronnées de succès, cette question des fondements a finalement rencontré une solution satisfaisante avec l’adoption du formalisme de Hilbert, qui consacre l’abandon de toute référence à la géométrie mais garde intacte l’idée de démonstration comme suite logique d’étapes toutes parfaitement explicites permettant de s’assurer avec certitude que l’énoncé démontré est vrai (et même *nécessairement* vrai, cf. Sackur et al. 2005). La démonstration a pris alors tout son statut l’activité emblématique des mathématiciens ; en bref, puisque tout *pouvait* être démontré[13], tout *devait* être démontré (dans le cadre du formalisme hilbertien).

La démonstration du théorème de Fermat par Andrew Wiles en 1994 (couronnement de 350 années d’efforts de la communauté mathématique) constitue le triomphe de ce point de vue: bien qu’elle soit très longue à expliciter et qu’elle mette en jeu des outils de très haut

caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques, sans lesquelles il est humainement impossible de comprendre un seul mot; sans ceux-ci, on erre vainement dans un labyrinthe obscur ».

10 en quelque sorte *vers l’aval*, c’est à dire depuis les axiomes vers les propriétés qui sont démontrées à partir de ceux-ci.

11 en quelque sorte *en amont*, c’est à dire la question de savoir sur quoi repose le fait que nous tenions pour vrais ces axiomes.

12 Tel que l'axiome disant que par un point pris hors d'une droite il passe une et une seule parallèle à cette droite, ce qui est « évident » sur un plan mais devient faux sur une sphère (comme la Terre, par exemple).

13 quitte, pour certaines propositions, à devoir démontrer qu’elles ne sont pas démontrables (Gödel).

niveau issus de plusieurs branches ardues des mathématiques actuelles, les mathématiciens bien au fait des domaines concernés peuvent tout de même la suivre de bout en bout. La preuve en est qu'entre la présentation de la démonstration par Wiles en juin 1993 et sa publication en 1995, de nombreuses lacunes ont été relevées et réglées : c'est bien que cette démonstration était suffisamment intelligible pour qu'on puisse en apercevoir les failles.

3 Évolution de la démonstration dans l'enseignement

Nous abordons maintenant la question de la place et de la forme de la démonstration « classique » (hilbertienne) dans l'enseignement. Toutefois cet objet est bien trop vaste pour le cadre modeste de cette communication. Pour pouvoir procéder à une observation empirique sur un corpus bien défini, il nous faut donc opérer une sévère délimitation de notre champ.

3.1 le choix du thème d'observation

Nous avons choisi d'observer l'évolution des démonstrations portant sur les propriétés d'un même domaine restreint des mathématiques ; or de nombreux domaines d'enseignement ont eu une durée de vie relativement brève durant les cinquante dernières années, période où les documents sont relativement accessibles.

Daubelcour (2009, p.3):

> Au fil des années sont apparues, et ont parfois disparu, de nombreuses disciplines mathématiques.
>
> (…)
>
> L'analyse et la géométrie, pour leur caractère pérenne et leur importance constante dans le corpus des programmes, vont constituer pendant tout le siècle le noyau dur de notre enseignement en terminale scientifique »

De fait, le domaine des nombres complexes (à cheval entre l'algèbre et la géométrie) est demeuré relativement inchangé (en ce qui concerne les thèmes d'étude) tout au long de cette période dans les filières scientifiques de la dernière année du secondaire en France[14]. Au sein de ce domaine, nous avons choisi une propriété qui, pour être établie, requiert une démonstration qui ne se réduit pas à un calcul trivial. Ce théorème porte sur deux opérations que l'on peut appliquer aux nombres complexes (notés habituellement par la lettre z) : la conjugaison (dont le résultat est noté $\bar{z}$) et l'élévation à la puissance n (dont le résultat est noté z^n). Ce théorème établit que l'ordre dans lequel on effectue ces deux opérations n'a aucune importance, le résultat sera toujours le même (on note cela par une formule bien

14 classe « terminale », 17 ans.

ramassée, comme les mathématiciens les aiment : $\overline{z}^n=\overline{z^n}$). C'est un théorème utile, parce parfois une combinaison de conjugaison et d'élévation à la puissance *n* est calculable dans un certain ordre mais pas dans l'autre.

Notre objet d'observation, qui occupe une place extrêmement réduite dans les programmes et les manuels, est tout à fait révélateur. Il n'est pas besoin de savoir précisément ce que sont les nombres complexes et leur conjugaison ; en effet, ce qui importe ici, et dont nous allons observer l'évolution, est moins ce théorème en lui-même que les relations qu'il entretient avec les autres théorèmes. En d'autres termes nous allons adopter un point de vue d'écologie didactique (Artaud 1998, Rajoson 1988, Assude 1996, 2003).

3.2 évolution dans les programmes et dans les livres

Le théorème du conjugué à la puissance *n*, qui dit que $\overline{z}^n=\overline{z^n}$, et que nous noterons « Tc*n* », n'apparaît dans les manuels qu'en 1992, alors qu'une autre proposition, qui s'écrit $|z|^n = |z^n|$, est présente dans les manuels dès le début de la période que nous avons observée (1962). Les formules sont presque semblables (en remplaçant une barre horizontale par deux barres verticales). En fait, leurs structures syntaxiques (Drouhard & Panizza, 2012) sont absolument identiques ; il en va de même pour les phrases du langage naturel par lesquelles on les exprime. Toutefois cette dernière n'est pas issue d'une démonstration, elle découle plutôt d'un *calcul* à partir d'une formule basée sur la trigonométrie, la « Formule de Moivre » . Ce calcul, largement à la portée d'un élève de Terminale scientifique, consiste en une suite d'écritures algébriquement reliées entre elles, et non d'une suite de propositions *logiquement* reliées. Il ne peut donc guère être qualifié de démonstration et c'est d'ailleurs pour cela que la proposition ne mérite pas le statut de « théorème ». Par contre, le Tc*n* se démontre, en employant une démonstration par récurrence.

La démonstration par récurrence, basée sur une propriété intrinsèque des nombres entiers (correspondant au 5ème axiome de Peano des entiers naturels), est l'objet d'un enseignement spécifique que l'on trouve généralement dans un chapitre à part au sein des manuels. Ce type de démonstration, qui pose aux élèves de nombreuses difficultés de compréhension et de mise en œuvre, n'apparaît dans les programmes et les manuels qu'en 1966, et son utilisation reste cantonnée à des propriétés (arithmétiques) de nombres entiers jusqu'en 1992 (programmes de 1991) où, dans un livre de la collection Terracher, il est appliqué aux nombres complexes, précisément pour le théorème Tc*n*.

Il est à noter que dans ce manuel, le théorème est énoncé dans la partie « cours » mais la démonstration est renvoyée à la partie « exercices » (exercice n°45) .

4. Conjugué

45 Propriété du cours

Soit z et z' deux nombres complexes.

1° En écrivant z et z' sous forme algébrique, vérifier que : $\overline{z+z'} = \bar{z}+\bar{z}'$ et $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$.

2° Si $z \neq 0$, on a $\frac{1}{z} \cdot z = 1$.

Montrer que $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ en prenant les conjugués.

3° En écrivant $\frac{z'}{z} = z' \times \frac{1}{z}$, montrer que $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}$ pour $z \neq 0$.

4° Démontrer par récurrence que, pour tout $z \neq 0$ et tout entier $n \geqslant 0$, $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$. Étendre au cas $n < 0$.

Figure 2 : exercice n°45 ; Collection Terracher

Certes, renvoyer une démonstration (ou une partie de celle-ci) en exercice est admissible dans l'idéal Hilbertien ; car il faut bien comprendre que *tout* n'a pas à figurer dans une démonstration, même formellement correcte. Un texte mathématique n'est en fait guère qu'une suite d'indications permettant au lecteur de reconstituer les étapes de la démonstration, de la même façon qu'une partition n'est pas la musique qu'elle code, mais n'est au fond qu'une suite d'indications pour l'exécutant. D'ailleurs, une démonstration où absolument tout serait exprimé par des symboles explicites (notamment logiques), serait littéralement illisible. Par contre, le renvoi en exercice (voire l'omission pure et simple) d'étapes de démonstration n'est admissible que dans la mesure où il est attendu du lecteur qu'il puisse reconstituer seul et au prix d'un effort raisonnable la partie omise. Or ici, vu la difficulté inhérente à la démonstration par récurrence, le fait que les élèves de terminale ne l'auront guère mise en œuvre que sur des propriétés simples des nombres entiers, et surtout vu le fait que le chapitre consacré au raisonnement par récurrence est situé *après* le chapitre concernant les nombres complexes, ce renvoi de la démonstration du Tc*n* en exercice apparaît en fait comme un moyen un peu hypocrite de se donner bonne conscience et de respecter l'idéal hilbertien à peu de frais.

4 *Un point de vue écologique sur les savoirs*

4.1 Écologie du Tc*n*

Chercher à comprendre l'évolution différente du Tc*n* et de la propriété $|z|^n = |z^n|$, nous a amenés à mettre en évidence le rôle joué par la démonstration par récurrence. C'est tout l'intérêt d'une perspective de type écologique: les objets de savoir sont considérés comme des

espèces dont l'évolution ne peut se comprendre qu'au sein d'un (éco-)système.

De ce point de vue, on peut dire qu'en 26 ans la récurrence a changé de niche écologique. Dès son introduction dans les programmes (en 1966), elle s'était constitué une niche dans le domaine arithmétique : elle y servait d'outil à la démonstration de nombreuses propriétés numériques. Dans les termes de la métaphore écologique, elle constituait un « aliment » pour les propriétés arithmétiques, ou encore, elle « faisait partie de la chaîne trophique » arithmétique. Or, de 1981 à 1998, l'arithmétique a disparu en tant que telle des programmes des classes terminales. On peut alors interpréter l'apparition en 1992 du Tc*n*, qui se « nourrit » -exclusivement- de démonstration par récurrence, comme résultant d'une « migration » de la démonstration par récurrence vers une nouvelle niche, celle des nombres complexes.

4.2 Écologie des savoirs enseignés

Dans tout ce qui précède, nous avons observé en quelque sorte « à la loupe » un point de détail (même s'il est significatif) de l'évolution de la place de la démonstration dans les mathématiques enseignées. Cela nous a permis au moins de voir que cette évolution est la résultante de mouvements complexes et enchevêtrés dans l'écosystème didactique.

Arrêtons-nous un moment sur cette notion. Pour qu'il y ait écosystème il ne suffit pas d'avoir des chaînes trophiques d'objets mathématiques s'alimentant les uns des autres : il faut également qu'il y ait une certaine pression de l'environnement sous forme de limitation des ressources ; cette idée est déjà présente dans le chapitre III de l'*Origine des espèces* (Darwin 1859, trad. 1992). En ce qui concerne l'écosystème des savoirs enseignés, la limitation est celle de la quantité finie de savoirs enseignables en un temps (didactique) donné. L'autre caractéristique de cet écosystème est que les chaînes trophiques correspondent au modèle hilbertien, à savoir que tout objet de savoir est démontrable. Ces deux caractéristiques peuvent entrer en conflit en cas de diminution du temps d'enseignement disponible comme cela a été le cas au cours des dernières années : la résolution du conflit apparaît sous la forme des démonstrations données en exercice comme on vient de le voir ou même directement admises. L'interprétation en termes de métaphore écologique rejoint ici le constat posé par Daubelcourt (2009).

4.3 Écologie des savoirs savants

Nous nous proposons maintenant de rechercher des facteurs permettant d'interpréter

l'évolution de la démonstration à l'extérieur de l'écosystème didactique. Nous considérerons que la société dans laquelle les savoirs mathématiques prennent naissance (que le thème du colloque nous invite à considérer) est la communauté mathématique.

Observons tout d'abord que les contraintes qui pèsent sur l'écosystème des mathématiques « savantes » sont très différentes de celles qui pèsent sur celui des mathématiques enseignées: en particulier, la pression sur la quantité fonctionne plutôt en sens inverse, les mathématiciens étant encouragés à produire le plus grand nombre possible de théorèmes. De fait, chaque année sont produits des milliers de théorèmes; mais parmi ceux-ci, seul un nombre infime sera réutilisé. En terme écologiques, nous avons une prolifération d'individus situés au sommet de la chaîne alimentaire. Ces innombrables théorèmes « jetables », à usage unique, sont un peu l'équivalent des méduses qui prolifèrent sur les côtes méditerranéennes quand les circonstances leur sont favorables, prédateurs envahissants, inutiles et inconsommables.

4.4 Les limites de la rigueur hilbertienne

À l'heure actuelle, un certain nombre de pans des mathématiques vivantes s'éloignent du modèle hilbertien strict : nous sommes bien là en présence d'une évolution au sein du corps social au sein duquel sont produites les connaissances. En effet, la démonstration « classique » a commencé à rencontrer ses limites.

Le premier type de limite a bien été mis en évidence par Thurston (1996) : c'est celle de démonstrations qui, pour emprunter des chemins trop techniques ou détournés, sont pleinement convaincantes (c'est à dire ne laissant aucun doute quant fait que ce qui est énoncé est vrai), mais ne permettent pas vraiment de comprendre ce qui est démontré. Cela toutefois n'est pas rédhibitoire dans le modèle hilbertien dans la mesure où seule y compte vraiment l'exactitude formelle.

Second type de limite : pour être assuré de la vérité d'un énoncé, il suffit de s'appuyer sur la correction de sa démonstration formelle (démarche hilbertienne). Mais comment s'assurer de cette correction ? Autrement dit, le problème a été décalé d'un cran. La réponse classique repose sur la lecture de la démonstration par un autre mathématicien qui va en quelque sorte (dans une métaphore musicale) la « rejouer » et dont l'oreille exercée saura détecter les éventuelles fausses notes. Mais plus une démonstration est longue, plus elle est, dans les faits, difficile à « rejouer ». Ce qui était difficile mais possible pour une centaine de

lignes peut devenir redoutable pour une centaine de pages, d'autant plus qu'en raison même du caractère formel de la démonstration, il hors de question d'en survoler des passages (pas plus qu'on ne peut sauter des mouvements dans une symphonie) : tout doit être vérifié pas à pas.

Une façon de s'assurer de la correction des « grosses » démonstrations est d'en automatiser la vérification : la Démonstration Assistée par Ordinateur est un domaine des mathématiques en plein essor. Le Théorème des Quatre Couleurs, qui énonce qu'il suffit de quatre couleurs pour colorier une carte géographique de façon que deux pays limitrophes n'aient pas la même couleur, quelle que soit la forme de leurs frontières, a ainsi été démontré en 1976, l'ordinateur ayant été utilisé pour résoudre les 1478 configurations possibles (en 1200 heures de calcul environ).



Toutefois le problème de la certitude ne fait que reculer encore une fois d'un cran : qu'est-ce qui nous assure que le programme de démonstration automatique (lui-même de taille imposante) n'a pas de « bug » ? En effet plus un programme est gros plus la probabilité est élevée d'y trouver des bugs. Tout utilisateur d'un ordinateur personnel reçoit régulièrement des corrections envoyées par le fournisseur de logiciels, et est malgré tout confronté un jour à l'autre à un « plantage » ; et cela malgré le travail incessant de dizaines voire de centaines d'ingénieurs pour éliminer les erreurs. On en est là à l'heure actuelle : le théorème des quatre couleurs *semble* parfaitement démontré car sa démonstration *semble* parfaitement correcte, mais personne n'en a l'absolue certitude, et il faut bien s'en contenter.

On rencontre des difficultés assez semblables avec des démonstrations qui sont trop volumineuses pour être embrassées par l'esprit d'un seul mathématicien, et ne peuvent pas non plus être traitées par ordinateur. C'est le cas du problème dit de la Classification des Groupes Simples Finis. Cette classification, appelée « théorème énorme » est basée sur le travail d'un centaine de mathématiciens, exposé en un demi-millier d'articles ainsi que de manuscrits non encore publiés, qui occupent des dizaines de milliers de pages. On comprend mieux l'ampleur de la tâche lorsqu'on sait que le plus gros des objets de cette classification (en 44 familles), le groupe de Fischer-Griess (ou « Monstre *M* ») est un ensemble qui contient

exactement 808 017 424 794 512 875 886 459 904 961 710 757 005 754 368 000 000 000 éléments (Tits 1983 p. 105), dont il faut établir qu'ils vérifient bien les propriétés requises, ce qui n'est même pas à la portée d'un ordinateur, le coût en temps de calcul et en espace mémoire se révélant prohibitif.

4.5 La démonstration dans les mathématiques actuelles

La modélisation et la simulation prennent une place grandissante, liée au considérable développement des ordinateurs, en modifiant considérablement les démonstrations. Par ailleurs, vu les cas d'impossibilité pratique de s'assurer d'une certitude absolue, mais devant la nécessité de continuer à avancer quand même, sont apparues les « démonstrations probabilistes ».

Une démonstration classique dit qu'une propriété démontrée est vraie à 100%, sinon elle est fausse. Un démonstration probabiliste calcule la probabilité qu'une proposition soit vraie. Si cette probabilité est 100 % alors elle est démontrée. Mais parfois elle peut n'être vraie qu'à 99,99999999999999999999 %. Elle n'est donc pas vraie au sens strict, mais on accepte tout de même cette « démonstration » comme satisfaisante. Cela peut avoir un grand intérêt pratique, en particulier pour des problèmes de cryptage (pour trouver des codes qui soient *en pratique* impossibles à « casser »).

5 Conclusion

Tout cela n'empêche pas les mathématiques d'être bien vivantes et florissantes, mais la place et le type de démonstrations dans les mathématiques actuelles ne sont plus les mêmes qu'au temps de Hilbert. Ainsi, l'évolution de la démonstration et son apparente obsolescence dans l'enseignement n'est pas à comprendre comme une sorte de décadence intrinsèque à déplorer, version didactique de l'inusable « baisse du niveau », mais bien plutôt comme une transposition (difficile, chaotique) à l'enseignement de l'évolution du statut de la preuve dans le monde des mathématiques vivantes, fortement liée à l'outil informatique. Cela étant, nous ne prétendons pas avoir « démontré » quoi que ce soit : il ne s'agit que de premières observations qui demanderaient à être confirmées par une étude plus approfondie.

6 Références bibliographiques

Artaud, M. (1998). Introduction à l'approche écologique du didactique – L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In : *Actes de la neuvième École d'été de didactique des mathématiques*. Caen : ARDM&IUFM. pp.101-139.

Assude, T. (1996), De l'écologie et de l'économie d'un système didactique : une étude de cas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16.1, 47-70.

Assude, T. (2003). *Etude du curriculum de mathématiques entre changements et résistances. Liens entre écologie et économie didactique.* HDR, Université de Provence.

Chevallard, Y. (1985): *La Transposition Didactique*. Grenoble: La Pensée sauvage.

Dahan-Dalmedico, A., & Peiffer, J. (1986). *Une histoire des mathématiques, Routes et dédales*. Paris: Le Seuil. coll. Points Sciences.

Darwin, Ch. (1859). *On the Origin of Species by Means of Natural Selection or the Preservation of Favoured Races in the Struggle for Life*. D. Becquemont et E. Boyer (Trad.) (1992) : *L'origine des espèces*. Paris : GF Flammarion.

Daubelcour, J.P. (2009). *Évolution des programmes d'analyse et de géométrie au vingtième siècle en terminale scientifique*. Lille: IREM de Lille. Également disponible sur le site : http://jpdaubelcour.pagesperso-orange.fr/histoire20.html

Drouhard, J-Ph., Panizza, M. (2012). Hansel et gretel et l'implicite sémio-linguistique en algèbre élémentaire. In Coulange, L., Drouhard, J.-Ph., Dorier, J.-L., Robert, A. (Comp.) *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbres élémentaire: bilan et perspectives* (pp.203-229). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Flament, D., Nabonnand, P. (2011). *Justifier en mathématiques*. Paris: Éditions de la Maison des Sciences de l'Homme.

Lindstrom, L. (1993). *Cargo cult: strange stories of desire from Melanesia and beyond*. Honolulu: University of Hawai'i Press.

Rajoson, L. (1988). *L'Analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique : trois études de cas.* Thèse 3e cycle. Université d'aix-Marseille.

Sackur, C., Assude, T., Maurel, M., Drouhard, J-Ph., Paquelier, Y. (2005) : L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *25* (1), 57-90.

Schneider, M. (à paraître). *Un obstacle épistémologique comme trait d'union des travaux d'un laboratoire de didactique des mathématiques*. In S. Coppé & M. Haspekian (Dir.): Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques (2012). Paris: IREM Paris 7 et ARDM.

Thurston, W. P. (1995). Preuve et progrès en mathématiques. J. Brette (Trad.). *Repères-IREM*. 21, 7-26.

Tits, J. (1983). Le Monstre. *Séminaire N. Bourbaki*, 1983-1984, exp. n° 620, p. 105-122.